Kuswanto-2012

Regresi linier berganda

Regresi linier berganda

- Pada regresi linier sederhana → 1 variabel bebas (X) dan 1 variabel tak bebas (Y)
- Regresi linier berganda :
  - 2 atau lebih variabel bebas (X1, X2,…,Xn)
  - 1 variabel tak bebas (Y)
- Apabila ada 2 variabel bebas, maka akan ada 2 koefisien regresi, yaitu b1 dan b2
- Bentuk persamaan
  - $Y = b0 + b1X1 + b2X2$

Lebih dari 2 var bebas

- 3 var bebas : $Y=b0 + b1X1 + b2X2 + b3X3$
- 4 Var bebas :

  $$Y=b0 + b1X1 + b2X2 + b3X3 + b4X4$$
- 5 Var bebas :

  $$Y=b0+b1X1+b2X2+b3X3+b4X4+b5X5$$
- Namun demikian, makin banyak var bebas makin sulit diinterpretasi

Cara analisis regresi berganda

1. Pendugaan model dengan rumus regresi berganda (hanya untuk 2 variabel bebas)
2. Pendugaan model dengan matrik

1. Pendugaan model regresi berganda dengan rumus

- hanya untuk 2 variabel bebas
- Untuk 3 variabel bebas atau lebih → tidak efisien

1. Pendugaan model dengan rumus regresi berganda

$$b1 = \frac{(\sum x_2^2)(\sum x_1 y) - (\sum x_1 x_2)(x_2 y)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$b2 = \frac{(\sum x_1^2)(\sum x_2 y) - (\sum x_1 x_2)(x_1 y)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

Persamaan regresi Y = b0 + b1X1 + b2X2

dimana

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - b_2 \bar{X}_2$$

Contoh soal

No Var	Produksi (Y)	Tinggi Tan (X1)	Jmlh anakan (X2)
1	5,755	110,5	24,5
2	5,939	105,4	16,0
3	6,010	118,1	14,6
4	6,545	104,5	18,2
5	6,730	93,6	65,4
6	6,750	84,1	17,6
7	6,889	77,8	17,9
8	7,862	75,6	19,4
Total			
Rerata			

Cara mengerjakan → lengkapi tabel dengan …..

No Var	Y	X1	X2	YX1	YX2	X1X2
1	5,76	110,50	24,50			
2	5,94	105,40	16,00			
3	6,01	118,10	14,60			
4	6,55	104,50	18,20			
5	6,73	93,60	65,40			
6	6,75	84,10	17,60			
7	6,89	77,80	17,90			
8	7,86	75,60	19,40			
Total						
Rerata						
JK						

Lengkapi tabel dengan nilai total, rata-rata dan jumlah kuadrat

No Var	Y	X1	X2	YX1	YX2	X1X2
1	5,76	110,50	24,50			
2	5,94	105,40	16,00			
3	6,01	118,10	14,60			
4	6,55	104,50	18,20			
5	6,73	93,60	65,40			
6	6,75	84,10	17,60			
7	6,89	77,80	17,90			
8	7,86	75,60	19,40			
Total	52,48	769,60	193,60			
Rerata	6,56	96,20	24,20			
JK	347,47	75789,24	6684,34			

Lengkapi tabel dengan nilai YX1

No Var	Y	X1	X2	YX1	YX2	X1X2
1	5,76	110,50	24,50	635,93		
2	5,94	105,40	16,00	625,97		
3	6,01	118,10	14,60	709,78		
4	6,55	104,50	18,20	683,95		
5	6,73	93,60	65,40	629,93		
6	6,75	84,10	17,60	567,68		
7	6,89	77,80	17,90	535,96		
8	7,86	75,60	19,40	594,37		
Total	52,48	769,60	193,60	40388,61		
Rerata	6,56	96,20	24,20			
JK	347,47	75789,24	6684,34			

Lengkapi tabel dengan nilai YX2

No Var	Y	X1	X2	YX1	YX2	X1X2
1	5,76	110,50	24,50	635,93	141,00	
2	5,94	105,40	16,00	625,97	95,02	
3	6,01	118,10	14,60	709,78	87,75	
4	6,55	104,50	18,20	683,95	119,12	
5	6,73	93,60	65,40	629,93	440,14	
6	6,75	84,10	17,60	567,68	118,80	
7	6,89	77,80	17,90	535,96	123,31	
8	7,86	75,60	19,40	594,37	152,52	
Total	52,48	769,60	193,60	40388,61	10160,13	
Rerata	6,56	96,20	24,20			
JK	347,47	75789,24	6684,34			

Lengkapi tabel dengan nilai X1X2

No Var	Y	X1	X2	YX1	YX2	X1X2
1	5,76	110,50	24,50	635,93	141,00	2707,25
2	5,94	105,40	16,00	625,97	95,02	1686,40
3	6,01	118,10	14,60	709,78	87,75	1724,26
4	6,55	104,50	18,20	683,95	119,12	1901,90
5	6,73	93,60	65,40	629,93	440,14	6121,44
6	6,75	84,10	17,60	567,68	118,80	1480,16
7	6,89	77,80	17,90	535,96	123,31	1392,62
8	7,86	75,60	19,40	594,37	152,52	1466,64
Total	52,48	769,60	193,60	40388,61	10160,13	148994,56
Rerata	6,56	96,20	24,20			
JK	347,47	75789,24	6684,34			

Masukkan ke dalam rumus b1 dan b2

Menghitung b1 dan b2

- Dari rumus

$$b1 = \frac{(\sum x_2^2)(\sum x_1 y) - (\sum x_1 x_2)(x_2 y)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

- Ingat bahwa

$$\sum x_2^2 = \sum (X_2^2) - (\sum X_2)^2 / n$$

karena merupakan rumus varian

- Dan untuk

$$\sum x_1^2 = \sum (X_1^2) - (\sum X_1)^2 / n$$

- Sehingga setiap nilai varian dan kovarian harus diselesaikan dulu rumusnya baru nilai dimasukkan untuk menghitung b1 dan b2

Setelah semua varian dan kovarian dimasukkan, maka..

- Diperoleh b1 = - 23,75

  b2 = 150,27

- Dan b0 dengan rumus $b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - b_2 \bar{X}_2$

  diperoleh b0 = 3,336

- Persamaan regresi diperoleh

  Y = 3,336 – 23,75 X1 + 150,27 X2

Uji hipotesis

- H0 : $b_i = 0$
  H1 : $b_i \neq 0$ maka $t_{hit} = b_i/se_{bi}$
- H0 : b1 = b2 =0
  H1 : minimum salah satu ≠ 0, maka tabel anovanya

SK	Db	JK	RK	F hit
2 buah b	2	∑bi (xiy)	RK reg	RK reg/RK sisa
Sisa	n-1-2	Sisa	RK sisa	
Total	n-I	JK Y		

Menghitung anova

- Jumlah kuadrat regresi

  $JKr = b1 \sum x1y + b2 \sum x2y$

  $= (-23,75)(65,194)+(150,27)(7,210)$

  $= 2.631,804$

- $JKtotal = \sum y^2 = 3.211,562$
- $JKsisa = \sum y^2 - JKr = 579.700$

Masukkan

SK	Db	JK	RK	F hit
Regresi	2	2.631.804	RK reg	11,35
Sisa	5	579.700	RK sisa	
Total	7	3.211.562		

F tabel 5% = 5,74 → persamaan linier tersebut NYATA, artinya pengaruh linier kombinasi tinggi tanaman dan jumlah anakan memberikan kontribusi yang nyata thd keragaman produksi gabah

Koefisien determinasi JKr/JKtotal = 0,82
Kesimpulan : sebanyak 82% total keragaman produksi dari 8 varietas padi tersebut dapat dihitung dengan fungsi linier berganda, dengan variabel tinggi tanaman dan jumlah anakan

2. Pendugaan model regresi linier berganda dengan matrik

2. Pendugaan model regresi linier berganda dengan matrik

- Perhatikan Contoh Regresi Linier Sederhana
- Model regresi linier sederhana, asalnya

  $Y = \beta 0 + \beta 1X + \varepsilon$
- Penduga dari model tersebut adalah

  $Y = b0 + b1X$
- Contoh kasus dengan data berikut

Data luas tanah (ha)(X) dan beaya produksi (Rp)(Y)

No	Y	X
1.	59,2	0,7
2.	97,8	1,5
3.	98,6	1,9
….	….	….
10.	8,9	0,1

Model regresi linier dari tabel tersebut adalah

$Y = \beta 0 + \beta 1X + \varepsilon$

Dari tabel tersebut dapat ditulis

$59,2 = \beta 0 + 0,7\ \beta 1 + e1$

$97,8 = \beta 0 + 1,5\ \beta 1 + e2$

$98,6 = \beta 0 + 1,9\ \beta 1 + e3$

….. … …..

$8,9 = \beta 0 + 0,1\ \beta 1 + e10$

$Y = \beta 0 + X\ \beta 1 + e$

Bila ditulis dalam bentuk matrik

$59{,}2 = \beta 0 + 0{,}7\ \beta 1 + e1$

$97{,}8 = \beta 0 + 1{,}5\ \beta 1 + e2$

$98{,}6 = \beta 0 + 1{,}9\ \beta 1 + e3$

….. … …..

$9{,}9 = \beta 0 + 0{,}1\ \beta 1 + e10$

Dipecah menjadi matrik

$$Y = \begin{pmatrix} 59{,}2 \\ 97{,}8 \\ 98{,}6 \\ \ldots. \\ 9{,}9 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}7 \\ 1 & 1{,}5 \\ 1 & 1{,}9 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta 0 \\ \beta 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} e1 \\ e2 \\ e3 \\ \ldots \\ e4 \end{pmatrix}$$

Vektor observasi

vektor var. bebas

Vektor dari parameter yg akan diduga

vektor eror

Penyelesaian matrik

Bila transpos (X') dikali X, maka → matrik X'X

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0,7 & 1,5 & 1,9 & \dots & 0,1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0,7 \\ 1 & 1,5 \\ 1 & 1,9 \\ \dots & \dots \\ 1 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum Xi \\ \sum Xi & \sum Xi^2 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0,7 & 1,5 & 1,9 & \dots & 0,1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 59,2 \\ 97,8 \\ 98,6 \\ \dots \\ 8,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Yi \\ \sum XiYi \end{pmatrix}$$

Penyelesaian matrik

- Penduga matrik β adalah

$b = \begin{bmatrix} b0 \\ b1 \end{bmatrix}$ maka dapat ditulis

$(X'X)\ b = (X'Y)$

- Penyelesaian matrik → dengan inversi

$(X'X)\ b = (X'Y)$

$(X'X)^{-1}\ (X'X)\ b = (X'X)^{-1}\ (X'Y)$

Maka $b = (X'X)^{-1}\ (X'Y)$

dimana

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum Xi \\ \sum Xi & \sum Xi^2 \end{pmatrix} \qquad X'Y = \begin{pmatrix} \sum Yi \\ \sum XiYi \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b0 \\ b1 \end{pmatrix}$$

Analog dengan cara tersebut,
dapat pula dikerjakan regresi linier berganda untuk 2 variabel bebas atau lebih
Cara mendapatkan matrik (X'X), (X'Y) dan matrik b, sama dengan regresi 1 variabel bebas
Dan hasilnya adalah…

Matrik untuk regresi linier berganda

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_1 X_2 & \sum X_2^2 \end{pmatrix} \quad X'Y = \begin{pmatrix} \sum Y \\ \sum X_1 Y \\ \sum X2Y \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b0 \\ b1 \\ b2 \end{pmatrix}$$

Dari matrik tersebut dapat dihitung nilai koefisien regresi berganda b1, b2 dan intersep b0 dengan rumus

$b = (X'X)^{-1}\,(X'Y)$

Perlu diperhatikan → mencari invers matrik

Cara ini dapat digunakan untuk mengitung koefisien regresi linier berganda 2, 3, 4 atau lebih variabel bebas

Untuk 3 variabel bebas, maka

Tabel ANOVA

Dari uji hipotesis

- H0 : $b_i = 0$ Vs H1 : $b_i \neq 0$ maka $t_{hit} = b_i/se_{bi}$
- H0 : b1 = b2 =0 Vs H1 : minimum salah satu ≠ 0, maka tabel anovanya

SK	Db	JK	RK	F hit
2 buah b	2	∑bi (xy)i	RK reg	RK reg/RK res
residu	n-1-2	Sisa	RK res	
Total	n-l	JK Y		

Regresi linier berganda 3 variabel bebas

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 & \sum X_3 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1X_2 & \sum X_1X_3 \\ \sum X_2 & \sum X_1X_2 & \sum X_2^2 & \sum X_2X_3 \\ \sum X_3 & \sum X_1X_3 & \sum X_2X_3 & \sum X_3^2 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} \sum Y \\ \sum X_1 Y \\ \sum X2Y \\ \sum X_3 Y \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b0 \\ b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix}$$

Dengan rumus

$b = (X'X)^{-1} (X'Y)$,

Maka nilai koefisien regresi

Akan ketemu

Menghitung invers matrik

- Invers suatu matrik C dapat dihitung dengan rumus

  $C^{-1} = C^{*} / |C|$

  dimana C^{*} = matrik ajugat yang berisi matrik kofaktor dan $|C|$ adalah diterminan matrik
- Invers matrik juga dapat dicari dengan metode Dolittle
- Cara paling mudah dan cepat menggunakan komputer

Contoh Soal : dari data sebelumnya

No Var	Y	X1	X2	YX1	YX2	X1X2
1	5,76	110,50	24,50	635,93	141,00	2707,25
2	5,94	105,40	16,00	625,97	95,02	1686,40
3	6,01	118,10	14,60	709,78	87,75	1724,26
4	6,55	104,50	18,20	683,95	119,12	1901,90
5	6,73	93,60	65,40	629,93	440,14	6121,44
6	6,75	84,10	17,60	567,68	118,80	1480,16
7	6,89	77,80	17,90	535,96	123,31	1392,62
8	7,86	75,60	19,40	594,37	152,52	1466,64
Total	52,48	769,60	193,60	40388,61	10160,13	148994,56
Rerata	6,56	96,20	24,20			
JK	347,47	75789,24	6684,34			

Diperoleh matrik

$$X'X = \begin{pmatrix} 8 & 769,6 & 193,6 \\ 769,6 & 75789,24 & 148994,56 \\ 193,6 & 148994,56 & 6684,34 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} 52,48 \\ 40388,61 \\ 10160,13 \end{pmatrix}$$

Cari invers matrik X'X dengan determinan untuk menduga b. Dari data tersebut ketemu

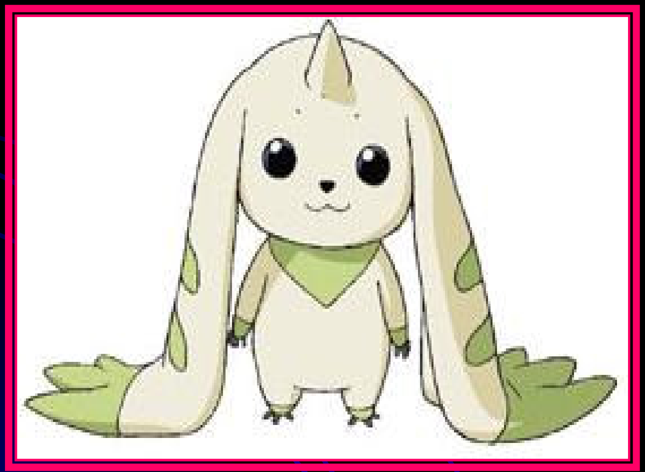
b0 = 6,336

b1 = -23,75

b2 = 150,27

Maka Y = 6,336-23,75X1+150,27X2

BAHAN DISKUSI



- Cari data untuk analisis regresi linier berganda
  - Satu variabel tak bebas Y
  - Dua variabel bebas X1 dan X2
- Hitunglah nilai b0, b1 dan b2
- Tunjukkan persamaan regresinya
- Tunjukkan tabel anovanya
- Kumpulkan minggu depan